

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي - سكيكدة -

الاختبار الثاني في مقياس التحليل العددي

السنة الثانية أساتذة التعليم الثانوي

08 نقاط

التمرين 01: لتكن جملة المعادلات

$$\begin{cases} -2x_1 + 10x_3 = 7 \\ 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$$

- (1) بين أن طريقة جاكوبي تتقارب من أجل هاته الجملة.
(2) أحسب التكرارات الثلاثة الأولى باستعمال طريقة جاكوبي مع أخذ الشعاع الابتدائي $x_0 = (0,0,0)^t$.
(3) عين قيمة التكرار k حتى يكون الخطأ أقل من أو يساوي 10^{-4} .

ملاحظة: $\left\| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right\| = \max \{ |a_1| + |a_2| + |a_3|; |b_1| + |b_2| + |b_3|; |c_1| + |c_2| + |c_3| \}$

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \max \{ |a|; |b|; |c| \}$$

التمرين 02: (06)

لتكن المعادلة: $f(x) = x - x^{\frac{4}{5}} - 2 = 0$ مع $x \in [4; 8]$ ، أحسب التكرارات الأربعة الأولى لتقريب حل المعادلة باستعمال طريقة النقطة الصامدة مع أخذ $x_0 = 8$ "عند تحويل المعادلة $f(x) = 0$ يجب تبين أن التابع g هو تابع مقلص".

التمرين 03: باستعمال طريقة نيوتن-رافسن أحسب التكرارات الأربعة الأولى من أجل تقريب حل الجملة:

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases}$$

06 نقاط

مع أخذ الشعاع الابتدائي $x^{(0)} = (2,2)^t$.

ملاحظة: تأخذ النتائج في كل التمارين بدقة 10^{-4} .

بالتوفيق للجميع

الاسم واللقب :

الفوج :

رقم التسجيل :

الرقم السري :

القسم :

المقياس :

التاريخ :



ملاحظة هامة: يمنع على الطالب وضع أية إشارة على ورقة الإمتحان.

الرقم السري

العلامة

"أرسل النصوذجي للإختبار الثاني في مقياس"
التسليط العددي والإعلام الآلي السنة
الثانية PEST

حل التمرين الأول: لتكن الجملة

$$\begin{cases} -2x_1 + 10x_2 = 7 \\ 10x_1 - x_2 = 9 \end{cases}$$

1/ بين أن طريقة جاوسي لتقارب من أجل حاته الجملة

أ نخير ترتيب المعادلات في الجدول لنحصل على جملة بقطر مهين على الشكل التالي

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \\ -2x_1 + 10x_3 = 7 \end{cases}$$

(ب) نحول الجملة $AX=B$ إلى الشكل $\vec{X}=T\vec{X}+C$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{9 - x_2}{10} = 0,9 - 0,1x_2 \\ x_2 = \frac{10 + x_1 + x_3}{10} = 1 + 0,1x_1 + 0,1x_3 \\ x_3 = \frac{7 + 2x_1}{10} = 0,7 + 0,2x_1 \end{cases}$$

$$\vec{X} = T \vec{X} + C$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

ج) تبين أن تنظيم (T) أقل من الواحد لدينا

$$||T|| = \text{Max} \{ |0| + |0,1| + |0,1| ; |0,1| + |0,1| + |0,2| ; |0,2| + |0,1| + |0,1| \}$$

$$= \text{Max} \{ 0,1 ; 0,3 ; 0,2 \} = 0,3 < 1$$

ومن هنا طريقة جاكوبي تتقارب

2) أحسب التكرارات الثلاثة الأولى مع أخذ الشعاع الابتدائي
 $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ وبذلك باستخدام طريقة جاكوبي لدينا:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0,9 + 0,1 x_2^{(0)} = 0,9 \\ x_2^{(1)} = 1 + 0,1 x_1^{(0)} + 0,2 x_3^{(0)} = 1 \\ x_3^{(1)} = 0,7 + 0,2 x_1^{(0)} = 0,7 \end{cases}$$

$$X^{(1)} = (0,9 ; 1 ; 0,7)^T$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,9 + 0,1 x_2^{(1)} = 0,9 + 0,1(1) = 1 \\ x_2^{(2)} = 1 + 0,1 x_1^{(1)} + 0,2 x_3^{(1)} = 1 + 0,1(0,9) + 0,2(0,7) = 1,23 \\ x_3^{(2)} = 0,7 + 0,2 x_1^{(1)} = 0,7 + 0,2(0,9) = 0,88 \end{cases}$$

$$X^{(2)} = (1 ; 1,23 ; 0,88)^T$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,9 + 0,1 x_2^{(2)} = 0,9 + 0,1(1,23) = 1,023 \\ x_2^{(3)} = 1 + 0,1 x_1^{(2)} + 0,2 x_3^{(2)} = 1 + 0,1(1) + 0,2(0,88) = 1,276 \\ x_3^{(3)} = 0,7 + 0,2 x_1^{(2)} = 0,7 + 0,2(1) = 0,9 \end{cases}$$

$$X^{(3)} = (1,023 ; 1,276 ; 0,9)^T$$

لأن عین قيمة التكرار k حتى يكون الخطأ أقل من أو يساوي 10^{-4} .

لدينا: $\Delta_{x^{(k)}} = \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq 10^{-4}$

من السؤال (1) $\|T\| = 0.3$ ولذا

وعليه نتحصل على: $\frac{(0.3)^k}{0.7} \leq 10^{-4}$

أي $(0.3)^k \leq (0.7) \times 10^{-4}$ وبالتالي $k \ln(0.3) \leq \ln(0.7) - 4 \ln(10)$

ومن هنا $k \geq \frac{\ln(0.7) - 4 \ln(10)}{\ln(0.3)}$ أي $k \geq 7.94$ وبتلك الحد:

$k = 8$

حل التمرين الثاني: لتكن المعادلة: $x - x^{\frac{4}{5}} - 2 = 0$ مع $x \in [1, 8]$

أحسن التكرارات الأربعة الأولى لتقريب حل المعادلة باستخدام طريقة النقطة الصاعدة مع أخذ $x_0 = 8$ عند تحويل المعادلة

لدينا $f(x) = 0$ إلى الشكل $g(x) = x$ يجب تبين أن g هو تابع مقصور

أي بيان أن g تابع مقصور على المجال $[1, 8]$ اعتماداً على نظرية التزايد المتتالية (متشعبة) $M \max |g'(x)|$ مع $x \in [1, 8]$

لدينا: $g'(x) = \frac{4}{5} x^{-\frac{1}{5}}$ ومنه $1 > 0.8 = |g'(1)| = \max |g'(x)|$ مع $x \in [1, 8]$

وبالتالي g تابع مقصور على المجال $[1, 8]$ وطريقة النقطة الصاعدة تتقارب نحو الحل لأن وجد

بإقبل تطبيق طريقة النقطة الصاعدة تبين أولاً أن الحل

موجود وحيد لمعادلة $f(x) = 0$ على المجال $[1, 8]$ وذلك بالإعتماد على نظرية

القيم المتوسطة: لدينا f مستمرة على المجال $[1, 8]$ ومتزايدة

على المجال $[1, 8]$ بالإضافة إلى ذلك $f(1) = -2 < 0$ و $f(8) = 0.7 > 0$

وبالتالي الحل موجود وحيد على المجال $[1, 8]$.

مع حساب التكرارات الأربعة الأولى مع $x_0 = 8$:

$x_1 = g(x_0) = 8^{\frac{4}{5}} + 2 = 7.2780$

$x_2 = g(x_1) = (7.2780)^{\frac{4}{5}} + 2 = 6.8934$

$x_3 = g(x_2) = (6.8934)^{\frac{4}{5}} + 2 = 6.6854$

$x_4 = g(x_3) = (6.6854)^{\frac{4}{5}} + 2 = 6.5719$

حل التمرين الثالث: باستخدام طريقة نيوتن - افسس أحسب التكرارات
 الأخيرة الأولى من أجل تقريب حل الجملة:

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases}$$

مع أخذ السحاج الابتدائي $X^{(0)} = (2, 2)^T$.
 $X^{(n+1)} = X^{(n)} - M^{-1}(X^{(n)}) \cdot F(X^{(n)})$ لدينا:

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}, M(2, 2) = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$F(2, 2) = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$M(4, 4) = \begin{pmatrix} 24 & -9 \\ -9 & 24 \end{pmatrix}, F(4, 4) = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & -9 \\ -9 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, 2 \\ 3, 2 \end{pmatrix}$$

$$M(3, 2, 3, 2) = \begin{pmatrix} 19, 2 & -9 \\ -9 & 19, 2 \end{pmatrix}, F(3, 2, 3, 2) = \begin{pmatrix} 1, 92 \\ 1, 92 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(3)} \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, 2 \\ 3, 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19, 2 & -9 \\ -9 & 19, 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1, 92 \\ 1, 92 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, 0118 \\ 3, 0118 \end{pmatrix}$$

$$M(3, 0118, 3, 0118) = \begin{pmatrix} 18, 0708 & -9 \\ -9 & 18, 0708 \end{pmatrix}, F(3, 0118, 3, 0118) = \begin{pmatrix} 0, 1066 \\ 0, 1066 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(4)} \\ y^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, 0118 \\ 3, 0118 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18, 0708 & -9 \\ -9 & 18, 0708 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0, 1066 \\ 0, 1066 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

و هو الحل المطلوب